

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
функционального анализа  
и операторных уравнений



Каменский М.И.  
11.04.2024 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.В.ДВ.02.01 Гладкие многообразия и отображения

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки.
- 2. Профиль подготовки:** Математическое и компьютерное моделирование
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Составители программы:** Кунаковская Ольга Вениаминовна, доцент, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений.
- 7. Рекомендована:** НМС математического факультета, протокол № 0500-03 от 28.03.2024 г.
- 8. Учебный год:** 2026–2027 **Семестр:** шестой

**9. Цели и задачи учебной дисциплины:**

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- ознакомление студентов с методами геометрического моделирования и анализа на многообразиях.

*Задачи учебной дисциплины:*

- применение современных математических методов к описанию сложных геометрических форм.

- овладение методами анализа на многообразиях.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** дисциплина относится к части блока 1, формируемой участниками образовательных отношений. Дисциплины по выбору.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса

– математический анализ (производная и дифференциал функции, многомерная производная, частные производные);

– аналитическая геометрия (действия с векторами, линии и поверхности второго порядка);

– дифференциальные уравнения (дифференциальные уравнения первого порядка);

– «Математические модели механических систем»;

– теоретическая механика (динамика точки);

– линейная алгебра (матрицы, определители, линейные пространства и линейные отображения).

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):**

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен решать задачи, предполагающие выбор и многообразие актуальных способов решения задач математического моделирования	ПК-1.1	Изучает математические модели явлений реального мира, сред, тел и конструкций	<p>Знать: содержание процессов самоорганизации и самообразования, их особенностей и технологий реализации, исходя из целей совершенствования профессиональной деятельности.</p> <p>Уметь: планировать цели и устанавливать приоритеты при выборе способов принятия решений с учетом условий, средств, личностных возможностей и временной перспективы достижения; осуществления деятельности.</p> <p>Владеть: приемами саморегуляции эмоциональных и функциональных состояний при выполнении профессиональной деятельности; технологиями организации процесса самообразования; приемами целеполагания во временной перспективе, способами планирования, организации, самоконтроля и самооценки деятельности.</p>

		ПК-1.2	Применяет теоретико-понятийный аппарат математической науки к широкому спектру задач математического моделирования	Знать: основные понятия разделов дисциплины, методы анализа и доказательств основных утверждений; Уметь: применять аппарат дискретной математики в решении практических задач; Владеть: навыками анализа и исследования конкретных задач.
--	--	--------	--	---

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 2/72.

Форма промежуточной аттестации: зачет.

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам
		6-й семестр
Аудиторные занятия	50	50
в том числе:	лекции	16
	практические	34
	лабораторные	
Самостоятельная работа	22	22
в том числе: курсовая работа(проект)		
Форма промежуточной аттестации (экзамен – час.)		
Итого:	72	72

### 13.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
<b>1. Лекции</b>			<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=32431">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=32431</a>
1	Топологические пространства и непрерывные отображения	Топологические пространства. Открытые и замкнутые множества. Примеры. Базы топологии, примеры. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы, примеры.	
2	Гладкие структуры на многообразиях	Карты и атласы конечномерных многообразий, примеры. Гладкие структуры, примеры.	
3	Гладкие отображения и их свойства	Гладкие отображения и диффеоморфизмы. Регулярные и критические точки и значения гладких отображений. Касательное пространство. Касательное отображение.	
<b>2. Практические занятия</b>			
1	Топологические пространства и непрерывные отображения	Топологические пространства. Открытые и замкнутые множества. Примеры. Базы топологии, примеры. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы, примеры.	
2	Гладкие структуры на многообразиях	Карты и атласы конечномерных многообразий, примеры. Гладкие структуры, примеры.	

3	Гладкие отображения и их свойства	Гладкие отображения и диффеоморфизмы. Регулярные и критические точки и значения гладких отображений. Касательное пространство. Касательное отображение.
<b>3. Лабораторные занятия</b>		

### 13.2 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1	Топологические пространства и непрерывные отображения	4	10		6	20
2	Гладкие структуры на многообразиях	6	12		8	26
3	Гладкие отображения и их свойства	6	12		8	26
Итого:		16	34		22	72

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в проведении лекций и практических занятий. На лекциях разбирается теоретический материал, примеры.

На практических занятиях решаются задачи по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. При изучении курса обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции и каждого практического занятия студентам рекомендуется подробно разобрать теоретический материал, разобрать задачи, решенные на занятии.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить теоретический материал. Еще раз разобрать решенные на этом занятии задачи, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении задач, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры, данные на лекциях. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

Методические указания для обучающихся при самостоятельной работе.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	<b>Борисович Ю.Г.</b> Введение в топологию / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. — М.: URSS, 2025. — 493 с.
2.	<b>Дубровин Б.А.</b> Современная геометрия / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. — М. : URSS, 2023. — 336 с.
3.	<b>Кунаковская О.В.</b> Топологические структуры нелинейного анализа : учебное пособие : в 2-х ч. / О.В. Кунаковская. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2026. — Ч. 1. — 93 с.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3.	<b>Кунаковская О.В.</b> Топологические пространства. Учеб.-метод. пособие для вузов // О.В. Кунаковская. — Воронежский государственный университет. — Воронеж, ООО ИПЦ «Научная книга», 2014. — 20 с.
4.	<b>Кунаковская О.В.</b> Многообразия. Динамические системы. Учеб.-метод. пособие для вузов // О.В. Кунаковская. — Воронежский государственный университет. — Воронеж, ООО ИПЦ «Научная книга», 2014. — 22 с.
5.	<b>Кунаковская О.В.</b> Топологические индексы пары полей. Монография / О.В. Кунаковская. -- Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга", 2020. -- 88 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
6.	<i>The manifold atlas. Project of the Max Planck Institute for Mathematics in Bonn.</i> <URL: <a href="http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Main_Page">http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Main_Page</a> >.
7.	<b>Спивак М.</b> Математический анализ на многообразиях / М. Спивак. — С-Пб.: Лань, 2005. — 160 с. <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=377">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=377</a> >.
8.	Блатов И. А. Геометрия и топология [Электронный ресурс] / Блатов И. А., Старожилова О. В. Самара : ПГУТИ, 2017. - 220 с. <a href="https://e.lanbook.com/book/182324">https://e.lanbook.com/book/182324</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	<b>Борисович Ю.Г.</b> Введение в топологию / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. — М.: URSS, 2025. — 493 с.
2.	<b>Дубровин Б.А.</b> Современная геометрия / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. — М. : URSS, 2023. — 336 с.
3.	<b>Кунаковская О.В.</b> Топологические структуры нелинейного анализа : учебное пособие : в 2-х ч. / О.В. Кунаковская. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2026. — Ч. 1. — 93 с.

### 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Лекция. Практическое занятие. Также при реализации учебной дисциплины, используются дистанционные образовательные технологии (курс на сайте edu.vsu.ru). При проведении занятий в дистанционном режиме обучения используются информационные и технические ресурсы Образовательного портала «Электронный университет ВГУ».

### 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория: специализированная мебель

### 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Топологические пространства и непрерывные отображения	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2	Домашнее задание, контрольная работа
2.	Гладкие структуры на многообразиях	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2	Домашнее задание, контрольная работа
3.	Гладкие отображения и их свойства	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2	Домашнее задание, контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				<i>Перечень вопросов К зачету</i>

### 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

#### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: домашнее задание, контрольная работа

#### Вариант 1

1. Определение базы топологии. Указать базу обычной топологии на вещественной оси  $\mathbb{R}$  (с проверкой).
2. Определение гомеоморфизма. Построить гомеоморфизм луча  $(5, +\infty)$  на луч  $(-\infty, -5)$ .

#### Вариант 2

1. Дать определение непрерывного отображения  $F: (M, \tau) \rightarrow (N, \sigma)$  топологических пространств. Доказать, что сужение  $F|_P$  непрерывного отображения  $F$  на подпространство  $P \subset M$  является непрерывным отображением  $F|_P: P \rightarrow N$ .

2. Определения открытого и замкнутого шаров в метрическом пространстве. Определение открытого множества в метрическом пространстве. Доказать, что открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством.

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: *собеседование по билетам зачета*.

Билеты к зачету формируются из заданий аналогичных задания контрольных работ.

### Вариант 1

1. Определение  $C^r$ -согласованной пары карт ( $r \geq 1$ ) на топологическом пространстве. Определение отображений перехода от одних локальных координат к другим. Определение  $C^r$ -атласа.

2. Полное (или тотальное) касательное пространство ТМ к многообразию М. Отображение  $\pi: TM \rightarrow M$ . Множества  $T_A M$  для  $A \subset M$  и  $T_p M$  для  $p \in M$ .

3. Построить атлас многообразия на окружности  $S^1$ . Построить представитель касательного вектора к кривой  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $\alpha(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$  в точке  $t=0$  в любой из подходящих карт.

### Вариант 2

1.  $C^\infty$ -структура многообразия на сфере  $S^2$ .

2. Операции в  $T_p M$ . Теорема о том, что для  $p \in M$  множество  $T_p M$  - линейное пространство относительно введенных операций.

3. Построить атлас многообразия на сфере  $S^2$ . Построить представитель касательного вектора к кривой  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow S^2$ ,  $\alpha(t) = (\cos 5t, \sin 5t, 0)$  в точке  $t=0$  в любой из подходящих карт.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков. КИМ содержит два теоретических вопроса и одно практическое задание.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Обучающийся в полной мере владеет теоретическими основами дисциплины, умеет связать теорию с практикой, доказывать теоремы и решать задачи, владеет математическим аппаратом при решении задач, осуществляет проверку адекватности моделей, анализирует результаты, оценивает надежность и качество функционирования</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Зачтено</i>
<i>Обучающийся владеет теоретическими основами дисциплины; в целом, умеет связать теорию с практикой, умеет доказывать теоремы и решать задачи, но допускает незначительные ошибки, неточности, владеет математическим аппаратом при решении задач, осуществляет проверку адекватности моделей, анализирует результаты</i>	<i>Базовый уровень</i>	
<i>Обучающийся частично владеет теоретическими основами дисциплины, допускает существенные ошибки при решении задач, не умеет связать теорию с практикой.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	
<i>Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.</i>	–	<i>Не Зачтено</i>

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### 1) закрытые задания (тестовые):

1. Размерность произведения гладких многообразий  $M$  и  $N$ , где  $\dim M = n_1$ ,  $\dim N = n_2$ , равна:

Варианты ответов:

1.  $n_1 n_2$ ,
2.  $n_1 + n_2$ ,
3.  $n_1 - n_2$ ,
4.  $n_1 / n_2$ .

Ответ: 2.

Решение: Пусть  $(U, \varphi)$  - карта на  $M$ ,  $(V, \psi)$  - карта на  $N$ , где

$$\varphi: U \rightarrow R^{n_1}, \quad \psi: V \rightarrow R^{n_2}.$$

Тогда  $(U \times V, \varphi \times \psi)$  - карта на произведении  $M \times N$ ,

$$\varphi \times \psi: U \times V \rightarrow R^{n_1+n_2}.$$

2. Отображение многообразий называется дифференцируемым, если:
  1. оно дифференцируемо в каждой точке,
  2. оно дифференцируемо в хотя бы в одной точке,

3. оно дифференцируемо в специально выбранной точке,

4. оно дифференцируемо дважды в каждой точке,

Ответ: 1

Решение: Отображение многообразий называется по определению дифференцируемым, если оно дифференцируемо в каждой точке.

## 2) открытые задания:

1. Сколько топологий существует на множестве из двух точек?

Ответ: 4.

Решение. На множестве из двух точек  $a, b$  имеются следующие топологии:

$\{\emptyset, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}.$

2. Найдите локальное представление функции  $f(x_1, x_2) = x_2$ , заданной на окружности  $S^1$ , в точке окружности, лежащей в верхней полуплоскости ( $x_2 > 0$ ).

Ответ:  $\sqrt{1-t^2}$ .

Решение:  $f \circ \varphi^{-1}(t) = f(t, \sqrt{1-t^2}) = \sqrt{1-t^2}$ .

## **Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:**

### 1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

### 2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов – указан хотя бы один неверный ответ.

### 3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

### 4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

### 5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**